Estatística I

Licenciatura em Economia
2.º Ano/2.º Semestre
2023/2024

Aulas Teóricas N.º 6 e 7 (Semana 4)

Docente: Elisabete Fernandes
E-mail: efernandes@iseg.ulisboa.pt

https://doity.com.br/estatistica-aplicada-a-nutricao

https://basiccode.com.br/produto/informatica-basica/

Conteúdos Programáticos

Aulas Teóricas (Semanas 1 a 3)	Aulas Teóricas (Semanas 3 a 5)	Aulas Teóricas (Semanas 5 a 7)	Aulas Teóricas (Semanas 8 a 13)
• **Capítulo 2**: Probabilidades	• **Capítulo 3**: Variáveis Aleatórias Unidimensionais	• **Capítulo 4**: Variáveis Aleatórias Multidimensionais	• **Capítulo 5**: Distribuições Teóricas • **Capítulo 6**: Amostragem. Distribuições por Amostragem.

Material didático: Exercícios do Livro Murteira et al (2015), Formulário e Tabelas Estatísticas

Bibliografia: B. Murteira, C. Silva Ribeiro, J. Andrade e Silva, C. Pimenta e F. Pimenta; *Introdução à Estatística*, 2ª ed., Escolar Editora, 2015.

https://cas.iseg.ulisboa.pt

Aula 4	**Início do Capítulo 2**: variável aleatória, definição e exemplos. Função de distribuição. Propriedades.
Aula 5	Classificação de variáveis aleatórias. V.a. discreta: Função probabilidade: propriedades e exemplos. V.a. contínua: Função densidade de probabilidade: propriedades e exemplos.
Aula 6	V.a. mistas, exemplo. Funções de uma v.a.: método para v.a. discretas e método geral. Exemplos.
Aula 7	Funções de uma v.a. Valor esperado de uma v.a. discreta e valor esperado de uma v.a. contínua. Exemplos. Valor esperado de uma função de uma v.a.: caso discreto.

Variáveis Aleatórias Discretas

1

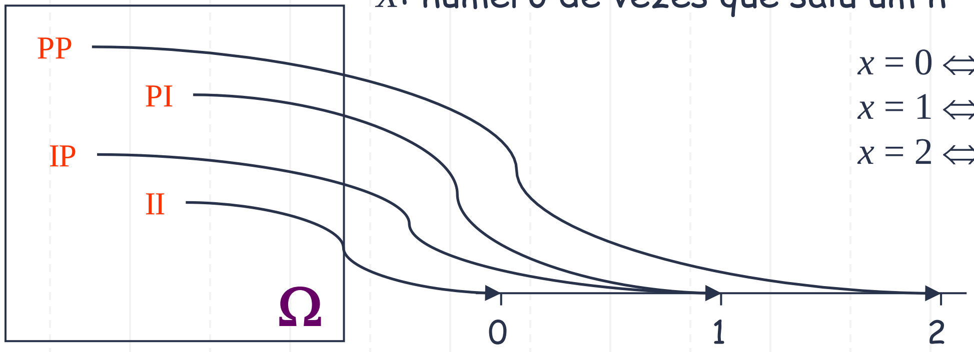
Variável Aleatória, Função de Distribuição, Função Massa de Probabilidade, Valor Esperado, Moda, Variância e Quantis

Variável Aleatória

Uma função ***X*** que associa a cada elemento ***w*** do espaço amostral **Ω** um valor ***x*** ∈ ***R*** é denominada de *variável aleatória (v.a.)*.

Experiência: lançar um 1 dado duas vezes e observar o resultado
(P = par e I = impar)

X: número de vezes que saiu um nº par em 2 lançamentos do dado



$x = 0 \Leftrightarrow$ II
$x = 1 \Leftrightarrow$ IP ou PI
$x = 2 \Leftrightarrow$ PP

https://www.slideserve.com/carlo/vari-veis-aleat-rias-e-distribui-o-binomial

Definição: *Uma variável aleatória é uma aplicação do espaço dos possíveis em* $\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} X : \quad & \Omega \to \mathbb{R} \\ & \omega \to X(\omega) = x \end{aligned}$$

Slides do Professor Manuel Scotto do IST

Tipos de Variáveis Aleatórias

Uma variável aleatória pode ser classificada em:

- Variável aleatória **discreta**
- Variável aleatória **contínua**

https://www.slideserve.com/carlo/vari-veis-aleat-rias-e-distribui-o-binomial

Variável Aleatória Discreta

Uma v.a. é discreta quando o conjunto de valores possíveis que ela assume for finito ou numerável de possibilidades.

https://www.slideserve.com/carlo/vari-veis-aleat-rias-e-distribui-o-binomial

Variável Aleatória Discreta: Exemplo 1

Considere-se o sexo (característica) das crianças em famílias com três filhos (*M*: masculino e *F*: feminino).

Espaço amostral:

$$\Omega = \{\underset{\omega_1}{(MMM)}, \underset{\omega_2}{(MMF)}, \underset{\omega_3}{(MFM)}, \underset{\omega_4}{(FMM)}, \underset{\omega_5}{(MFF)}, \underset{\omega_6}{(FMF)}, \underset{\omega_7}{(FFM)}, \underset{\omega_8}{(FFF)}\}$$

Defina-se a v.a. X: nº de crianças do sexo masculino (M).

Ω	MMM	MMF	MFM	FMM	MFF	FMF	FFM	FFF
X	3	2	2	2	1	1	1	0

$\rightarrow$ Então X assume valores no conjunto {0, 1, 2, 3}, logo é uma variável aleatória discreta.

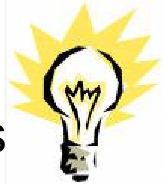
https://www.slideserve.com/carlo/vari-veis-aleat-rias-e-distribui-o-binomial

Variável Aleatória Contínua

Uma v.a. é contínua quando o conjunto de valores possíveis que ela assume for não enumerável.

https://www.slideserve.com/carlo/vari-veis-aleat-rias-e-distribui-o-binomial

Variável Aleatória Contínua: Exemplo



Considere-se o tempo de vida, em horas, das lâmpadas produzidas por uma fábrica.

Defina-se a v.a. ***T***: tempo de vida, em horas, de uma lâmpada que foi escolhida, ao acaso, da fábrica.

$\rightarrow$ Então, ***T*** é uma variável aleatória contínua que assume qualquer valor real não negativo.

https://www.slideserve.com/carlo/vari-veis-aleat-rias-e-distribui-o-binomial

Função Massa de Probabilidade

Função massa de probabilidade (f.m.p): É a função que atribui a cada valor x_i da v. a. discreta X a sua probabilidade de ocorrência e pode ser representada pela tabela:

x	x_1	x_2	...	x_n
$P(X=x)$	$P(X=x_1)$	$P(X=x_2)$	...	$P(X=x_n)$

Uma função massa de probabilidade deve satisfazer:

$$\boxed{0 \leq P(X = x_i) \leq 1 \quad \text{e} \quad \sum_{i=1}^{n} P(X = x_i) = 1}$$

https://www.slideserve.com/carlo/vari-veis-aleat-rias-e-distribui-o-binomial

Função Massa de Probabilidade: Exemplo 1

Defina-se a v.a. X: nº de crianças do sexo masculino em famílias com três filhos (*M*: masculino e *F*: feminino).

Ω	MMM	MMF	MFM	FMM	MFF	FMF	FFM	FFF
X	3	2	2	2	1	1	1	0

Acontecimentos independentes

x	0	1	2	3
$P(X = x)$	1/8	3/8	3/8	1/8

https://www.slideserve.com/carlo/vari-veis-aleat-rias-e-distribui-o-binomial

Função Massa de Probabilidade: Resumindo...

- **Função de probabilidade de uma variável discreta X:**

Se X é uma v.a. discreta, que assume valores distintos $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$, então a função de probabilidade (f.p.) de X é definida como

$$\boxed{f(x) = p(x) = \begin{cases} P[X = x] & \text{se } x = x_i \\ 0 & \text{se } x \neq x_i \end{cases} \quad , \quad i = 1, 2, \ldots, n, \ldots}$$

e deve satisfazer as seguintes condições:

1. $0 \leq f(x) \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}$;
2. Se n finito, $\sum_{i=1}^{n} f(x_i) = 1$.

Caso n infinito, $\sum_{i=1}^{\infty} f(x_i)$ terá de ser uma série convergente de soma 1.

Ao conjunto de pares ordenados $(x_i, f(x_i))$, $i = 1, 2, \ldots, n, \ldots$, designa-se por **distribuição de probabilidades da variável aleatória**.

Variável Aleatória Discreta: Exemplo 2

O Departamento de Estatística é formado por 35 professores, sendo 21 homens e 14 mulheres. Uma comissão de 3 professores será constituída sorteando, ao acaso, três membros do departamento.

Qual é a probabilidade da comissão ser formada por ***pelo menos duas mulheres***?

Vamos definir a v.a.

X: nº de mulheres na comissão.

Quais são os possíveis valores que X pode assumir?

https://www.slideserve.com/carlo/vari-veis-aleat-rias-e-distribui-o-binomial

Variável Aleatória Discreta: Exemplo 2

Espaço amostral	Probabilidade	X
(HHH)	$\frac{21}{35}\times\frac{20}{34}\times\frac{19}{33}=0{,}203$	0
(HHM)	$\frac{21}{35}\times\frac{20}{34}\times\frac{14}{33}=0{,}150$	1
(HMH)	$\frac{21}{35}\times\frac{14}{34}\times\frac{20}{33}=0{,}150$	1
(MHH)	$\frac{14}{35}\times\frac{21}{34}\times\frac{20}{33}=0{,}150$	1
(HMM)	$\frac{21}{35}\times\frac{14}{34}\times\frac{13}{33}=0{,}097$	2
(MHM)	$\frac{14}{35}\times\frac{21}{34}\times\frac{13}{33}=0{,}097$	2
(MMH)	$\frac{14}{35}\times\frac{13}{34}\times\frac{21}{33}=0{,}097$	2
(MMM)	$\frac{14}{35}\times\frac{13}{34}\times\frac{12}{33}=0{,}056$	3

Acontecimentos dependentes

https://www.slideserve.com/carlo/vari-veis-aleat-rias-e-distribui-o-binomial

Função Massa de Probabilidade: Exemplo 2

x	0	1	2	3
$P(X = x)$	0,203	0,450	0,291	0,056

Assim, tem-se $P(X \geq 2) = P(X=2) + P(X=3) = 0{,}291 + 0{,}056 = 0{,}347$.

https://www.slideserve.com/carlo/vari-veis-aleat-rias-e-distribui-o-binomial

Variável Aleatória Discreta: Exemplo 3

Um dado é lançado duas vezes, de forma independente. Qual é a probabilidade da ***soma dos pontos nos dois lançamentos ser menor do que 6***?

$$\Omega = \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6),$$
$$(2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6),$$
$$(3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (3,5), (3,6),$$
$$(4,1), (4,2), (4,3), (4,4), (4,5), (4,6),$$
$$(5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (5,5), (5,6),$$
$$(6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6)\}.$$

Qual é a probabilidade de cada ponto w_i de Ω ?

Admitindo que o dado é perfeitamente homogêneo e sendo os lançamentos independentes,

$$P(w_i) = 1/36 \text{ , qualquer } w_i \in \Omega.$$

https://www.slideserve.com/carlo/vari-veis-aleat-rias-e-distribui-o-binomial

Função Massa de Probabilidade: Exemplo 3

Função massa de probabilidade de X:

x	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$P(X=x)$	1/36	2/36	3/36	4/36	5/36	6/36	5/36	4/36	3/36	2/36	1/36

		2^0. lançamento					
		1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1^0. Lançamento	**1**	2	3	4	5	6	7
	2	3	4	5	6	7	8
	3	4	5	6	7	8	9
	4	5	6	7	8	9	10
	5	6	7	8	9	10	11
	6	7	8	9	10	11	12

X: Soma dos pontos nos dois lançamentos do dado

https://www.slideserve.com/carlo/vari-veis-aleat-rias-e-distribui-o-binomial

Função Massa de Probabilidade: Exemplo 3

X: soma dos pontos nos dois lançamentos do dado.

Função massa de probabilidade de X:

x	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\mathrm{P}(X=x)$	1/36	2/36	3/36	4/36	5/36	6/36	5/36	4/36	3/36	2/36	1/36

Então, a probabilidade da soma dos pontos nos dois lançamentos ser menor do que 6 é

$$P(X < 6) = P(X=5) + P(X=4) + P(X=3) + P(X=2)$$
$$= 4/36 + 3/36 + 2/36 + 1/36$$
$$= 10/36 = 0{,}278$$

https://www.slideserve.com/carlo/vari-veis-aleat-rias-e-distribui-o-binomial

Função Massa de Probabilidade: Outros Exemplos

Podemos estar interessados em outras variáveis aleatórias definidas para o mesmo espaço amostral.

Y: valor máximo obtido nos dois lançamentos do dado.

y	1	2	3	4	5	6
$P(Y = y)$	1/36	3/36	5/36	7/36	9/36	11/36

Z: diferença entre os pontos do 2º e do 1º lançamento do dado.

z	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$P(Z = z)$	1/36	2/36	3/36	4/36	5/36	6/36	5/36	4/36	3/36	2/36	1/36

https://www.slideserve.com/carlo/vari-veis-aleat-rias-e-distribui-o-binomial

Variável Aleatória Discreta: Exemplo 3

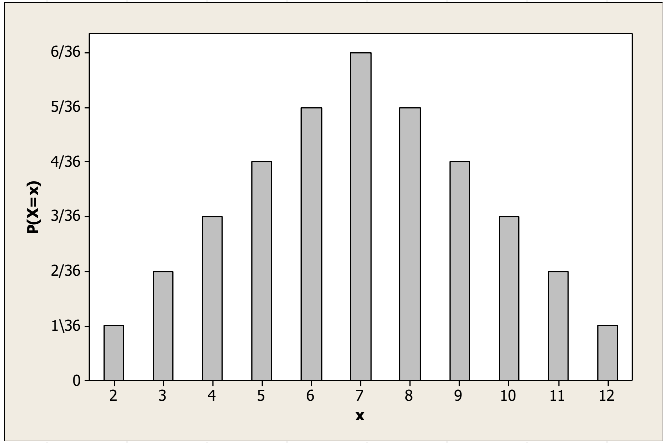
Qual é o valor médio da soma dos pontos (X) no lançamento de dois dados?

Ω = {(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6),
(2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6),
(3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (3,5), (3,6),
(4,1), (4,2), (4,3), (4,4), (4,5), (4,6),
(5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (5,5), (5,6),
(6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6)}

$\Rightarrow$ 36 pontos igualmente prováveis

x	$P(X = x)$
2	1/36
3	2/36
4	3/36
5	4/36
6	5/36
7	6/36
8	5/36
9	4/36
10	3/36
11	3/36
12	1/36

Representação algébrica e gráfica da função massa de probabilidade da v.a. X



https://www.slideserve.com/carlo/vari-veis-aleat-rias-e-distribui-o-binomial

Variável Aleatória Discreta: Valor Médio

Valor Esperado (média populacional): Dada a v.a. X, assumindo os valores $x_1, x_2, \ldots, x_n$, chamamos de valor médio, *valor esperado* ou *esperança matemática de X* o valor

$$E(X) = x_1 \times P(X = x_1) + \ldots + x_n \times P(X = x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i \times P(X = x_i)$$

Notação: $\mu = E(X)$

Seja X uma variável aleatória discreta que assume valores em $\mathcal{R}_X$ com função de probabilidade $p(x)$ e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função. Temos então que

$$\boxed{\mathbb{E}[g(X)] = \sum_{x_i \in \mathcal{R}_X} g(x_i)p(x_i) = \sum_{x_i \in \mathcal{R}_X} g(x_i)\mathbb{P}(X = x_i).}$$

Valor Médio da V.a. Discreta: Exemplo 3

x	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$P(X=x)$	1/36	2/36	3/36	4/36	5/36	6/36	5/36	4/36	3/36	2/36	1/36

No exemplo, para média da v.a. X (soma de pontos), tem-se:

$$E(X) = 2\times(1/36) + 3\times(2/36) + \ldots + 11\times(2/36) + 12\times(1/36)$$
$$= 252/36 = 7,$$

ou seja, em média, a soma dos pontos no lançamento dos dois dados é igual a 7.

https://www.slideserve.com/carlo/vari-veis-aleat-rias-e-distribui-o-binomial

Variável Aleatória Discreta: Variância

Variância: É o valor esperado da v.a. $(X - E(X))^2$, ou seja, se X assume os valores $x_1, x_2, \ldots, x_n$, então

$$\mathrm{Var}(X) = \sum_{i=1}^{n} [x_i - E(X)]^2 \times P(X = x_i)$$

Notação: $\sigma^2 = \mathrm{Var}(X)$.

Da relação acima, tem-se que

$$\mathrm{Var}(X) = E(X^2) - [E(X)]^2.$$

Variável Aleatória Discreta: Desvio Padrão

Desvio Padrão: É definido como a raiz quadrada positiva da variância, isto é,

$$\mathrm{DP}(X) = \sqrt{\mathrm{Var}(X)}.$$

Notação: $\sigma = \mathrm{DP}(X).$

Variância da V.a. Discreta: Exemplo 3

x	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$P(X=x)$	1/36	2/36	3/36	4/36	5/36	6/36	5/36	4/36	3/36	2/36	1/36

$$\text{Var}(X) = (2-7)^2 \times \frac{1}{36} + (3-7)^2 \times \frac{2}{36} + \ldots + (11-7)^2 \times \frac{2}{36} + (12-7)^2 \times \frac{1}{36}$$

$$= \frac{210}{36} = 5{,}83.$$

Alternativamente, poderíamos calcular

$$E(X^2) = 2^2 \times \frac{1}{36} + 3^2 \times \frac{2}{36} + \ldots + 11^2 \times \frac{2}{36} + 12^2 \times \frac{1}{36}$$

$$= \frac{1974}{36} = 54{,}83$$

$$\text{Var}(X) = E(X^2) - [E(X)]^2.$$

e, portanto, $\text{Var}(X) = 54{,}83 - 7^2 = 5{,}83.$

https://www.slideserve.com/carlo/vari-veis-aleat-rias-e-distribui-o-binomial

Propriedades do Valor Médio e Variância

1) Se $X = a$, em que $\underline{a}$ é uma constante, então

$$E(X) = a \qquad \text{e} \qquad \mathrm{Var}(X) = 0.$$

2) Se $Y = aX + b$, em que a e b são constantes, então

$$E(Y) = E(aX + b) = aE(X) + b$$

e

$$\mathrm{Var}(Y) = \mathrm{Var}(aX + b) = a^2\,\mathrm{Var}(X).$$

Propriedades do Valor Médio e Variância (Cont.)

3) Sejam X e Y duas variáveis quaisquer, então

$$E(X+Y) = E(X) + E(Y).$$

P4. Sejam n variáveis aleatórias $X_1, \ldots, X_n$. Então,

$$\mathbb{E}(X_1 + X_2 + \ldots + X_n) = \mathbb{E}(X_1) + \mathbb{E}(X_2) + \ldots + \mathbb{E}(X_n).$$

4) Sejam X e Y duas variáveis independentes, então

$$\mathrm{Var}(X+Y) = \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y).$$

P4) Sejam $X_1, \ldots, X_n$ variáveis aleatórias independentes. Então,

$$\mathrm{Var}(X_1 + \ldots + X_n) = \mathrm{Var}(X_1) + \ldots + \mathrm{Var}(X_n).$$

Momentos

- **Definição 3.9 – Momento de ordem *k* em relação à origem**

$$\mu'_k = E(X^k) \qquad \text{(se existir)}$$

Observações:

- Trata-se do valor esperado da função $\psi(X) = X^k$.
- No caso discreto $E(X^k) = \sum_{x \in D} x^k f_X(x)$ enquanto no caso contínuo $E(X^k) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k f_X(x)dx$

- **Definição 3.10 – Momento de ordem *k* em relação à média**

$$\mu_k = E\left[(X-\mu)^k\right] \qquad \text{(se existir)}$$

Murteira et al (2015)

Variável Aleatória Discreta: Moda

Moda: A moda de uma variável aleatória discreta X, designada por mo, corresponde ao ponto de máximo da função massa de probabilidade de X

$$mo = \max_x P(X = x).$$

A moda de uma variável aleatória discreta **nem sempre é única**.

Slides do Professor Manuel Scotto do IST

Variável Aleatória Discreta: Covariância

Definição 4.2.1: Sejam X e Y variáveis aleatórias integráveis. Então a covariância entre X e Y é definida por

$$Cov(X,Y) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}(X))(Y - \mathbb{E}(Y))],$$

Teorema 4.2.1: Sejam $X_1, \ldots, X_n$ variáveis aleatórias integráveis. Então,

$$Var\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} Var(X_i)] + 2\sum_{i<j} Cov(X_i, X_j).$$

Em particular se $Cov(X_i, X_j) = 0$ para $i \neq j$ então

$$Var\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} Var(X_i)$$

Definição 4.2.2: Seja X e Y variáveis aleatórias integráveis então o coeficiente de correlação entre X e Y é dado por

$$\rho(X,Y) := \frac{Cov(X,Y)}{\sigma_X \sigma_Y} = \mathbb{E}\left[\left(\frac{X - \mathbb{E}(X)}{\sigma_X}\right)\left(\frac{Y - \mathbb{E}(Y)}{\sigma_Y}\right)\right]$$

Proposição 4.2.1: O coeficiente de correlação é independente da escola e transação da variáveis, ou seja,

$$\rho(X,Y) = \rho(aX + b, cY + d)$$

Função de Distribuição

- **Função de distribuição de uma variável aleatória discreta X:**

Define-se função de distribuição (f.d.) de uma variável aleatória X como

$$\boxed{F(x)=P[X \leq x].}$$

Esta função tem domínio $\mathbb{R}$, conjunto de chegada [0,1] e verifica as seguintes propriedades:

1. $0 \leq F(x) \leq 1, \forall x \in \mathbb{R};$
2. $F(x_1) \leq F(x_2), \forall x_1, x_2: x_1 < x_2$ (é uma função monótona não decrescente);
3. $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$ e $\lim_{x \to +\infty} F(x) = 1;$
4. $P[x_1 < X \leq x_2] = F(x_2) - F(x_1), \forall x_1, x_2: x_1 < x_2.$

A **Função distribuição** é uma função contínua à direita.

Elementos de Estatística e Probabilidades II (uevora.pt)

Função de Distribuição: Notas

1. $P(X \in B) = \sum_{x_i \in B} f_X(x_i)$;
2. $F_X(x) = \sum_{x_i \leq x} f_X(x_i)$;
3. $f_X(x) = F_X(x) - F_X(x^-)$, onde $F_X(x^-) \equiv P(X < x)$;
4. $P(a \leq X \leq b) = F_X(b) - F_X(a) + f_X(a)$;
5. $P(a < X < b) = F_X(b) - F_X(a) - f_X(b)$:
6. $P(a \leq X < b) = F_X(b) - F_X(a) - f_X(b) + f_X(a)$;
7. $P(a < X \leq b) = F_X(b) - F_X(a)$.

Notas de Probabilidades e Estatística dos Professores Giovani Silva e Carlos Daniel

Função Massa de Probabilidade: Exemplo 4

X = número de vezes que saiu cara em três lançamentos de uma moeda,

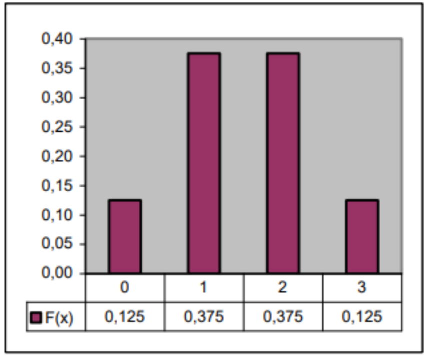
$P[X = 0] = P[(C \cap C \cap C)] = \frac{1}{8}$

$P[X = 1] = P[(F \cap C \cap C) \cup (C \cap F \cap C) \cup (C \cap C \cap F)] = \frac{3}{8}$

$P[X = 2] = P[(F \cap F \cap C) \cup (F \cap C \cap F) \cup (C \cap F \cap F)] = \frac{3}{8}$

$P[X = 3] = P[(F \cap F \cap F)] = \frac{1}{8}$

x	0	1	2	3
f(x)	1/8	3/8	3/8	1/8



Elementos de Estatística e Probabilidades II (uevora.pt)

Função de Distribuição: Exemplo 4

$$F(0) = P[X \leq 0] = \sum_{x \leq 0} f(x) = \frac{1}{8};$$

$$F(1) = P[X \leq 1] = \sum_{x \leq 1} f(x) = \frac{4}{8}$$

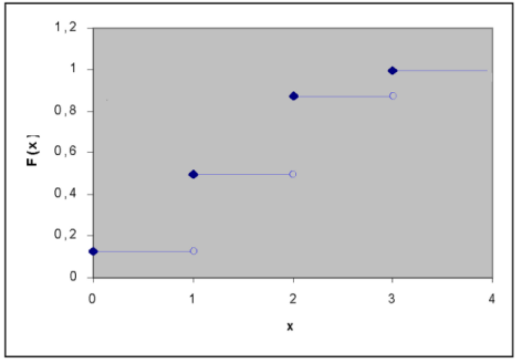
$$F(2) = P[X \leq 2] = \sum_{x \leq 2} f(x) = \frac{7}{8}$$

$$F(3) = P[X \leq 3] = \sum_{x \leq 3} f(x) = 1$$

A representação gráfica da função distribuição de uma variável aleatória é "em escada"

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{1}{8}, & 0 \leq x < 1 \\ \frac{4}{8}, & 1 \leq x < 2 \\ \frac{7}{8}, & 2 \leq x < 3 \\ 1, & x \geq 3 \end{cases}$$

Elementos de Estatística e Probabilidades II (uevora.pt)



Variáveis Aleatórias Discretas: Exercícios

2

Variável Aleatória, Função de Distribuição, Função Massa de Probabilidade, Valor Esperado, Moda, Variância e Quantis

Exercício Suplementar que não consta do livro Murteira et al (2015)

3.2 Numa fábrica existem três máquinas iguais de uma mesma marca, que trabalham independentemente. A probabilidade de cada máquina avariar num dado espaço de tempo é 0.1. Seja X a variável aleatória que representa o número de máquinas que findo esse período de tempo estão a trabalhar. Determine:

(a) A função de probabilidade de X.

(b) A função de distribuição de X.

(c) O valor esperado, moda, mediana e variância de X.

Exercício 3.2 (a): Variável Aleatória

- **Experiência aleatória**

  Classificação de 3 máquinas (que funcionam de forma independente) quanto a estarem avariadas (A) ou não ($\overline{A}$).

- **Eventos chave**

  $A =$ máquina avariada

  $\overline{A} =$ máquina a trabalhar

- **Probabilidades**

  $P(A) = 0.1$

  $P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0.1 = 0.9$

- **Espaço de resultados**

  $\Omega = \{A\,A\,A, \quad \overline{A}\,A\,A, A\,\overline{A}\,A, A\,A\,\overline{A}, \quad \overline{A}\,\overline{A}\,A, \overline{A}\,A\,\overline{A}, A\,\overline{A}\,\overline{A}, \quad \overline{A}\,\overline{A}, \overline{A}\}.$

  $A\,A\,A \equiv A_1 \cap A_2 \cap A_3$ (1a., 2a. e 3a. máquinas avariadas)

  etc.

  $\#\Omega = 2^3 = 8$ (eventos elementares)

- **V.a. de interesse**

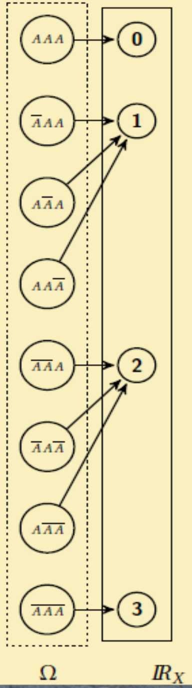
  $X =$ número de máquinas que findo o período estão a trabalhar

  $X : \Omega \to \mathbb{R}_X$

Exercício 3.2 (a): Contradomínio da V.a.

- **Contradomínio e representação esquemática de X**

  Atendendo ao número de máquinas, os valores possíveis de X são $0, 1, 2, 3$, i.e., $\mathbb{R}_X = \{0, 1, 2, 3\}$.



Exercício 3.2 (a): Função Massa de Probabilidade

$$
\begin{aligned}
P(X=0) &= P(\text{nenhuma máquina a trabalhar}) \\
&= P(\text{três máquinas avariadas}) \\
&= P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) \\
&= P(A_1) \times P(A_2) \times P(A_3) && \text{[eventos completamente independentes]} \\
&= 0.1^3 && \text{[eventos equiprováveis]} \\
&= 0.001
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
P(X=1) &= P(\text{1 máquina a trabalhar}) \\
&= P(\text{duas máquinas avariadas}) \\
&= P\left(A_1 \cap A_2 \cap \overline{A_3}\right) + P\left(A_1 \cap \overline{A_2} \cap A_3\right) + P\left(\overline{A_1} \cap A_2 \cap A_3\right) \\
&= P(A_1) \times P(A_2) \times P(\overline{A_3}) + P(A_1) \times P(\overline{A_2}) \times P(A_3) + P(\overline{A_1}) \times P(A_2) \times P(A_3) \\
& && \text{[eventos completamente independentes]} \\
&= 3 \times (1-0.1) \times 0.1^2 && \text{[eventos equiprováveis]} \\
&= 0.027
\end{aligned}
$$

Exercício 3.2 (a): Função Massa de Probabilidade

$$
\begin{aligned}
P(X=2) &= P(2 \text{ máquinas a trabalhar}) \\
&= P(1 \text{ máquina avariada}) \\
&= P\left(A_1 \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3}\right) + P\left(\overline{A_1} \cap A_2 \cap \overline{A_3}\right) + P\left(\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap A_3\right) \\
&= P(A_1) \times P(\overline{A_2}) \times P(\overline{A_3}) + P(\overline{A_1}) \times P(A_2) \times P(\overline{A_3}) + P(\overline{A_1}) \times P(\overline{A_2}) \times P(A_3) \\
& \qquad \text{[eventos completamente independentes]} \\
&= 3 \times 0.1 \times (1-0.1)^2 \times \qquad \text{[eventos equiprováveis]} \\
&= 0.243
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
P(X=3) &= P\left(\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3}\right) \\
&= P(\overline{A_1}) \times P(\overline{A_2}) \times P(\overline{A_3}) \qquad \text{[eventos completamente independentes]} \\
&= (1-0.1)^3 \qquad \text{[eventos equiprováveis]} \\
&= 0.729.
\end{aligned}
$$

Exercício 3.2 (a): Função Massa de Probabilidade

- **F.p. de** X (cont.)

$$P(X=x)=\begin{cases}0.001, & x=0\\ 0.027, & x=1\\ 0.243, & x=2\\ 0.729, & x=3\\ 0, & \text{outros valores de x}\end{cases}$$

Seja X uma variável aleatória discreta assumindo valores em R_X = {x1, x2, ...}

A função (massa de probabilidade) de X é dada por

$$f_X(x) = P(X = x) = \begin{cases} P(X = x_i), & x = xi \in R_X \\ 0, & caso\ contrário \end{cases}$$

- **Obs.** — Alternativamente, poderíamos tirar partido do facto de $X \sim$ Binomial$(n=3, p=0.9)$, logo

$$P(X=x) \overset{form.}{=} \binom{3}{x} 0.9^x (1-0.9)^{3-x}, \; x = 0.1,2,3.$$

$0 \leq f_X(x) \leq 1, \forall\, x \in \mathcal{R}$

$$\sum_{x \in \mathcal{R}} f_X(x) = 1$$

Escusado será dizer que obteríamos o mesmo resultado.

A distribuição Binomial será abordada mais à frente!!!

Exercício 3.2 (b): Função de Distribuição

- **F.d. de X**

Comecemos por preencher a tabela abaixo com alguns valores da f.d. de X.

x	$F_X(x) = P(X \le x) = \sum_{x_i \le x} P(X = x_i)$
-0.5	$F_X(-0.5) = P(X \le -0.5) = 0$
0	$F_X(0) = P(X \le 0) = P(X = 0) = 0.001$
0.3	$F_X(0.3) = P(X \le 0.3) = P(X = 0) = 0.001$
1	$F_X(1) = P(X \le 1) = P(X = 0) + P(X = 1) = 0.001 + 0.027 = 0.028$
1.4	$F_X(1.4) = P(X \le 1.4) = P(X \le 1) = 0.028$
2	$F_X(2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) = 0.001 + 0.027 + 0.243 = 0.271$
2.8	$F_X(2.8) = P(X \le 2) = 0.271$
3	$F_X(3) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3)$ $= 0.001 + 0.027 + 0.243 + 0.729 = 1$
10.5	$F_X(10.5) = P(X \le 3) = 1$

Podemos então concluir que:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 0.001, & 0 \le x < 1 \\ 0.028, & 1 \le x < 2 \\ 0.271, & 2 \le x < 3 \\ 1, & x \ge 3. \end{cases}$$

Exercício 3.2 (c): Valor Esperado e Moda

- **Valor esperado de X**

$$
\begin{aligned}
E(X) &= \sum_{x=0}^{3} x \times P(X=x) \\
&= 0 \times 0.001 + 1 \times 0.027 + 2 \times 0.243 + 3 \times 0.729 \\
&= 2.7
\end{aligned}
$$

$$
\boxed{P(X=x) = \begin{cases} 0.001, & x=0 \\ 0.027, & x=1 \\ 0.243, & x=2 \\ 0.729, & x=3 \\ 0, & \text{outros valores de x} \end{cases}}
$$

- **Moda de X**

  Represente-se a moda de X por $mo(X)$. Então

$$
mo(X): \quad P[X = mo(X)] = \max_{x \in \{0,1,2,3\}} P(X=x).
$$

  Atendendo a que $P(X=3) = 0.729$ é superior a qualquer dos restantes valores da f.p. de X, temos que o valor mais frequente de X é efectivamente $mo(X) = 3$.

Exercício 3.2 (c): Mediana

- **Mediana de X**

  Represente-se a mediana de X por $me(X)$. Então

$$me(X) \quad : \quad \frac{1}{2} \leq F_X[me(X)] \leq \frac{1}{2} + P[X = me(X)] \tag{1}$$

$$F_X[me(X)^-] \leq \frac{1}{2} \leq F_X[me(X)]. \tag{2}$$

Ora, tirando partido da definição de mediana em (1) e do facto de

$$\frac{1}{2} \leq F_X(3) \overset{(a)}{=} 1 \quad \leq \quad \frac{1}{2} + P(X=3) = \frac{1}{2} + 0.729 = 1.229,$$

concluímos que $me(X) = 3$.

Em alternativa, notemos que

$$F_X(3) = P(X \leq 3) \overset{(a)}{=} 1 \geq \frac{1}{2};$$

mais, de uma consulta da f.d. de X tem-se

Podemos então concluir que:

$$F_X(x) \quad = \quad \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 0.001, & 0 \leq x < 1 \\ 0.028, & 1 \leq x < 2 \\ 0.271, & 2 \leq x < 3 \\ 1, & x \geq 3. \end{cases}$$

Exercício 3.2 (c): Mediana

$$F_X(3^-) = F_X(2) = 0.271 \leq \frac{1}{2}.$$

Logo

$$F_X(3^-) \leq \frac{1}{2} \leq F_X(3),$$

pelo que o resultado (2) leva-nos a concluir que $me(X) = 3$.

Podemos então concluir que:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 0.001, & 0 \leq x < 1 \\ 0.028, & 1 \leq x < 2 \\ 0.271, & 2 \leq x < 3 \\ 1, & x \geq 3. \end{cases}$$

Exercício 3.2 (c): Variância

- **Variância de X**

  Como o valor esperado de X é igual a $E(X) = 2.97$ e o 2o. momento de X é dado por

$$\begin{aligned} E(X^2) &= \sum_{x=0}^{3} x^2 \times P(X=x) \\ &= 0^2 \times 0.01 + 1^2 \times 0.027 + 2^2 \times 0.243 + 3^2 \times 0.729 \\ &= 7.56, \end{aligned}$$

  segue-se que

$$\begin{aligned} V(X) &= E(X^2) - E^2(X) \\ &= 7.56 - 2.7^2 \\ &= 0.27. \end{aligned}$$

$$\boxed{P(X=x) = \begin{cases} 0.001, & x=0 \\ 0.027, & x=1 \\ 0.243, & x=2 \\ 0.729, & x=3 \\ 0, & \text{outros valores de x} \end{cases}}$$

- **Obs.** — Alternativamente, poderíamos ter tirado partido do facto de $X \sim \text{Binomial}(n=3, p=0.9)$ e concluir que

$$\begin{aligned} E(X) &\overset{form.}{=} n\,p = 3 \times 0.9 = 2.7 \\ V(X) &\overset{form.}{=} n\,p\,(1-p) = 3 \times 0.9 \times (1-0.9) = 0.27. \end{aligned}$$

Obrigada!

Questões?